Note → (κάτω ολοκλήρ.) : $\mathcal{L}f = \sup\{\mathcal{L}(P,f) : P \in \mathcal{P}(A)\}$
(άνω ολοκλήρ.) : $Uf = \inf\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}(A)\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ : $\mathcal{L}f \leq \mathcal{U}f$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ένα τυχαίο αλλά σταθ. $P_0 \in \mathcal{P}(A)$.

Τότε $\forall P \in \mathcal{P}(A)$: $L(P,f) \leq U(P_0, f) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{L}f \leq U(P,f)$, Αυτό ισχύει $\forall P_0 \in \mathcal{P}(A)$

το $\mathcal{L}f$ κφ. του $U(P,f)$ οποίου

άρα το $\mathcal{L}f \leq \mathcal{U}f$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο και $f: A \to \mathbb{R}$ φραγμένη τότε η f λέγεται ολοκληρώσιμη (πάνω στο A) αν

$$\mathcal{L}f = \mathcal{U}f = \int_A f = \int_A f(\bar{x})\, d\bar{x}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

(α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο και $f: A \to \mathbb{R}$

με τύπο $f(\bar{x}) = c$, $\forall \bar{x} \in A$

τότε $(\forall P \in \mathcal{P}(A))(\forall S \in S_P)$: $\inf(f|S) = \sup(f|S) = c$

$\Rightarrow (\forall P \in \mathcal{P}(A))$: $\mathcal{L}(P,f) = \sum_{S \in S_P} \inf(f|S) \cdot V(S) =$

$= c \cdot \sum_{S \in S_P} V(S) = c \cdot V(A)$

και

$U(P,f) = c \cdot V(A)$ όμοια

Άρα, $\mathcal{L}f = \sup\{L(P,f) : P \in \mathcal{P}(A)\} = c \cdot V(A)$

και $\mathcal{U}f = \inf\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}(A)\} = c \cdot V(A)$

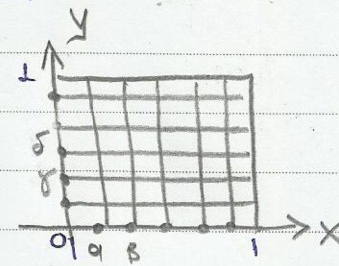
Άρα, $\int_A f(\bar{x})\, d\bar{x} = c \cdot V(A)$.

Note → Αν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο και $f: A \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(\bar{x}) = c$, $\forall \bar{x} \in A$ προκύπτει ότι $\int_A f(\bar{x})\, d\bar{x} = c \cdot V(A)$.

Ειδικότερα το $\int_A 1\, d\bar{x} = V(A)$ και $\int_A 0\, dx = 0$

όπου το $V(A)$ είναι το περιεχόμενο του A (β) Για $A=[0,1]\times[0,1]$ και συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & , x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\\ 1 & , x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$



Έστω, $P\in P(A)$ μια τυχαία διαμέριση
τότε $(\forall S\in S_P)$ με $S=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$
τότε $L(P,f)=\sum_{S\in S_P}\inf(f|S)\,v(S)=0$, αφού $\inf(f|S)=0$
και

$$U(P,f)=\sum_{S\in S_P}\sup(f|S)\,v(S)=1, \text{ αφού } \sup(f|S)=1$$

Παρακάτω:

$$U(P,f)=\sum_{S\in S_P}\cdot v(S)=v(A)=1\cdot 1=1.$$

Συνεπώς, $L_f=0$ και $U_f=1$ διαφορετικά μεταξύ τους
Άρα, η f <u>όχι</u> ολοκληρώσιμη συνάρτηση